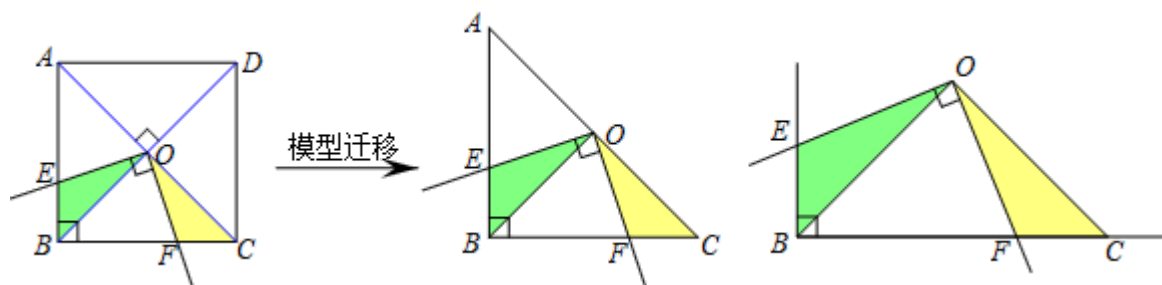


第2讲 旋转综合

一、旋转之对角互补模型

💡 锦囊妙计

如图，正方形 $ABCD$ ，对角线 AC 、 BD 交于点 O ， $\angle EOF = 90^\circ$ ，与正方形的两边分别交于点 E 、 F 。



❗ 结论：

① $\triangle BOE \cong$ _____ , $\triangle AOE \cong$ _____ .

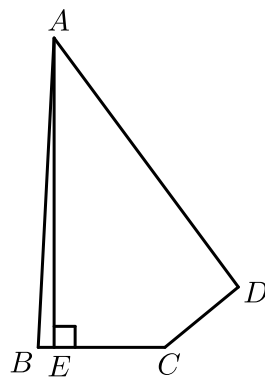
② $OE =$ _____ , $EF =$ _____ .

③ $S_{\text{四边形} OEBF} =$ _____ .

💡 举个“栗”子

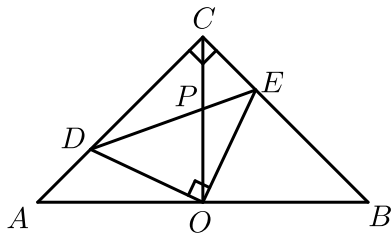
栗子1

1. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ ， $AB = AD$ ， $AE \perp BC$ 于点 E 。若 $AE = 17$ ， $BC = 8$ ， $CD = 6$ ，则四边形 $ABCD$ 的面积为 _____ 。



栗子2

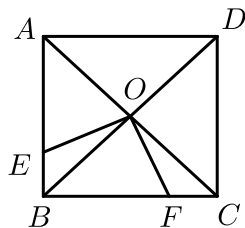
2. 如图，在等腰直角 $\triangle ACB$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， O 是斜边 AB 的中点，点 D 、 E 分别在直角边 AC 、 BC 上，且 $\angle DOE = 90^\circ$ ， DE 交 OC 于点 P 。则下列结论：（1）图形中全等的三角形只有两对；（2） $\triangle ABC$ 的面积等于四边形 $CDOE$ 的面积2倍；（3） $CD + CE = \sqrt{2}OA$ ；（4） $AD^2 + BE^2 = DE^2$ 。其中正确的结论有（ ）。



- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

栗子3

3. 如图，正方形 $ABCD$ 中， O 是对角线 AC 、 BD 的交点，当 E 、 F 分别在 AB 、 BC 上运动时，始终保持 $OE \perp OF$ ，正方形的边长为5。



- （1）求证： $\triangle OEB \cong \triangle OFC$ 。
 （2）四边形 $OEBF$ 面积是否不变，若不变，请求出该四边形的面积，若变化，请说明理由。
 （3）试确定 EF 的长度的取值范围。

4. 如图①，在平面直角坐标系中，等边 $\triangle ABC$ 的顶点 A, B 的坐标分别为 $(5, 0), (9, 0)$ ．点 D 是 x 轴正半轴上一个动点，连接 CD ，将 $\triangle ACD$ 绕点 C 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle BCE$ ，连接 DE ．

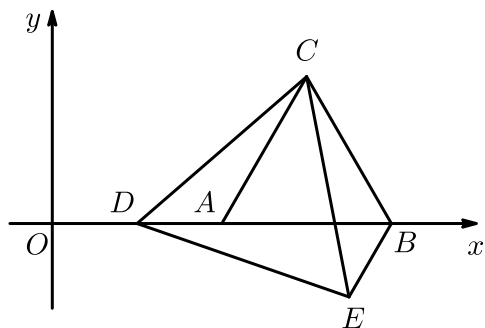


图 ①

- (1) 直接写出点 C 的坐标，并判断 $\triangle CDE$ 的形状，说明理由．
 (2) 如图②，当点 D 在线段 AB 上运动时， $\triangle BDE$ 的周长是否存在最小值?若存在，求出 $\triangle BDE$ 的最小周长及此时点 D 的坐标；若不存在，说明理由．

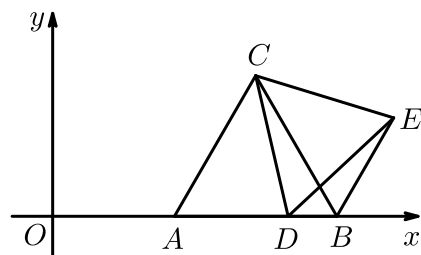


图 ②

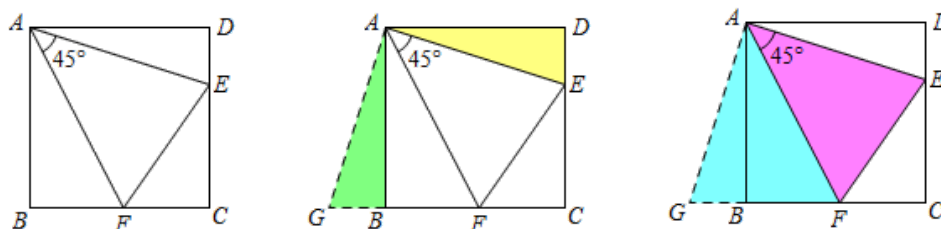
- (3) 当 $\triangle BDE$ 是直角三角形时，求点 D 的坐标．（直接写出结果即可）

二、旋转之角含半角模型

💡 锦囊妙计

💡 半角在倍角内

如图，正方形 $ABCD$ ，点 E 在边 CD 上，点 F 在边 BC 上， $\angle EOF = 45^\circ$ 。



辅助线：延长 BC 至点 G ，使_____，连接 AG 。（补短法）

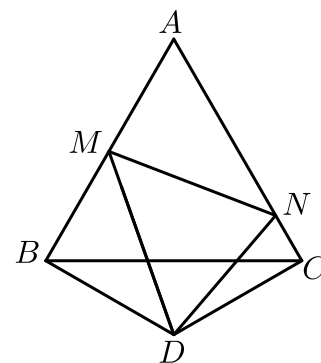
！ 结论：

- ① 旋转全等： $\triangle ABG \cong$ _____，条件_____。
- ② 对称全等： $\triangle FAG \cong$ _____，条件_____。
- ③ $EF =$ _____，进而推出 $\triangle CEF$ 的周长等于_____。
- ④ AF 平分_____， AE 平分_____。

💡 举个“栗”子

栗子4

5. 如图， $\triangle ABC$ 是边长为10cm的等边三角形， $\triangle BDC$ 是等腰三角形，且 $\angle BDC = 120^\circ$ 。以 D 为顶点作一个 60° 的角，使其两边分别交 AB 于点 M ，交 AC 于点 N ，连接 MN ，则 $\triangle AMN$ 的周长为_____。



6. 回答下列问题

- (1) 探究发现：如图1， $\triangle ABC$ 为等边三角形，点 D 为 AB 边上的一点， $\angle DCE = 30^\circ$ ， $\angle DCF = 60^\circ$ 且 $CF = CD$ 。

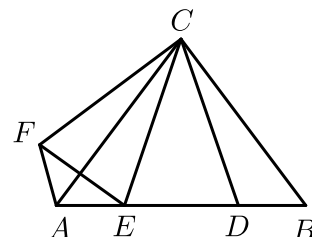


图 1

- ① 求 $\angle EAF$ 的度数。
② DE 与 EF 相等吗？请说明理由

- (2) 类比探究：如图2， $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形， $\angle ACB = 90^\circ$ ，点 D 为 AB 边上的一点， $\angle DCE = 45^\circ$ ， $CF = CD$ ， $CF \perp CD$ ，请直接写出下列结果， $\angle EAF$ 的度数。

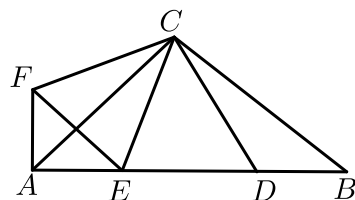
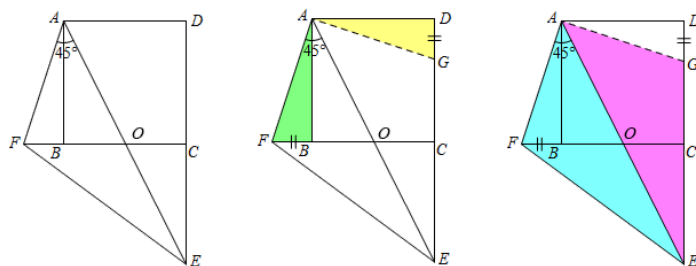


图 2

半角在倍角外

如图，正方形 $ABCD$ ， $\angle EOF = 45^\circ$ ，旋转 $\angle EOF$ 与 DC 的延长线交于点 E ，与 CB 的延长线交于点 F



辅助线：在 CD 截取_____，连接 AG 。（截长法）

- ！ 结论：**① 旋转全等： $\triangle ABF \cong$ _____，水平_____。
② 对称全等： $\triangle EAG \cong$ _____，水平_____。
③ $EF =$ _____。
④ AE 平分_____。

7. 已知：正方形 $ABCD$ 中（图1）， $\angle MAN = 45^\circ$ ， $\angle MAN$ 绕点 A 顺时针旋转，它的两边分别交 CB ， DC （或它们的延长线）于点 M ， N 。

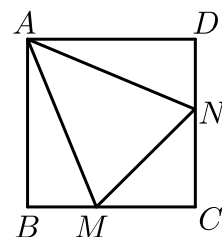


图1

- （1）当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM \neq DN$ 时（图2），线段 BM ， DN 和 MN 之间有什么数量关系？写出猜想，并加以证明。

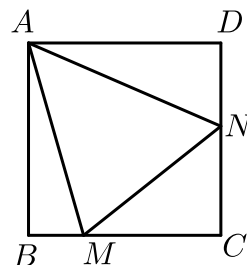


图2

- （2）当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到图3的位置时，线段 BM ， DN 和 MN 之间又有什么数量关系？证明你的猜想。

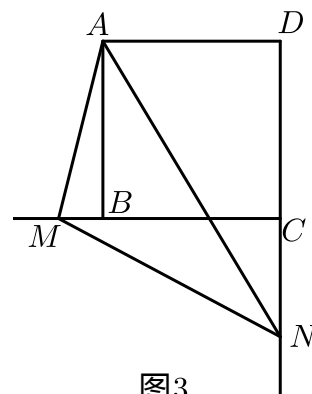
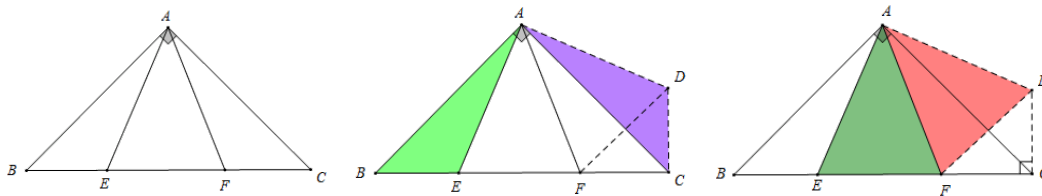


图3

- （3）若正方形的边长为4，当点 N 运动到 DC 边的中点处时，求 BM 的长。

角含半角的平方关系

已知 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形， $\angle EAF = 45^\circ$ 。



思路：过点A作_____，且_____，连接CD、FD。

依题可知 $\triangle ABC$ 、 $\triangle AED$ 都是_____，

通过“_____”可证 $\triangle ABE \cong$ _____， $BE =$ _____， BE _____，

！结论：

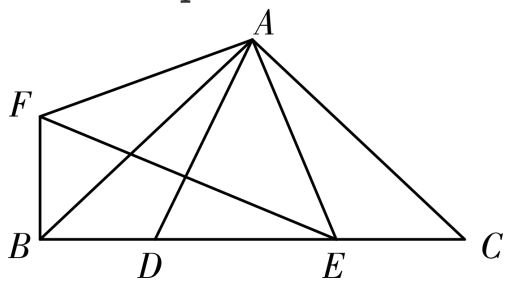
① $\triangle AEF \cong$ _____， $EF =$ _____，

② $BE^2 + CF^2 =$ _____。

举个“栗子”

栗子7

8. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ ， D 、 E 为 BC 上两点， $\angle DAE = 45^\circ$ ， F 为 $\triangle ABC$ 外一点，且 $FB \perp BC$ ， $FA \perp AE$ ，则下列结论：① $CE = BF$ ；② $BD^2 + CE^2 = DE^2$ ；③ $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{4}AD \cdot EF$ ；④ $CE^2 + BE^2 = 2AE^2$ ，其中正确的是()



A. ①②③④

B. ①②④

C. ①③④

D. ②③